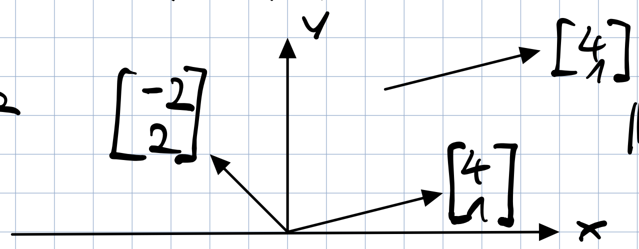
Woche 0

Vektoren und Linearkombinationen (1.1)

Ein Vektor ist (momentan) ein Element von $\mathbb{R}^m$,
$m \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (natürliche Zahlen)

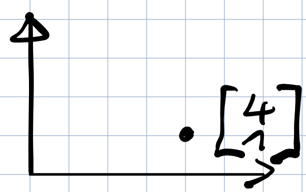
$\mathbb{R}^2$



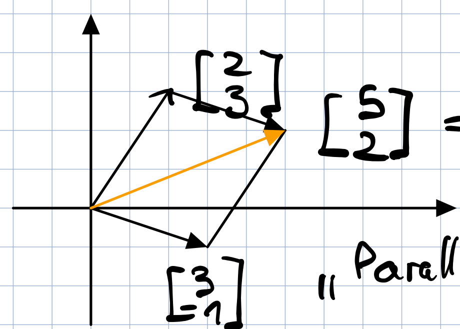
$$\mathbb{R}^m: \; v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}, \; w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$$

(Spaltenvektoren)

Zeichnung als Pfeil (Bewegung) oder als Punkt (Ort)



Vektoraddition: kombiniere die Bewegungen!



$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

„Parallelogramm"

Def. 1.1: Seien

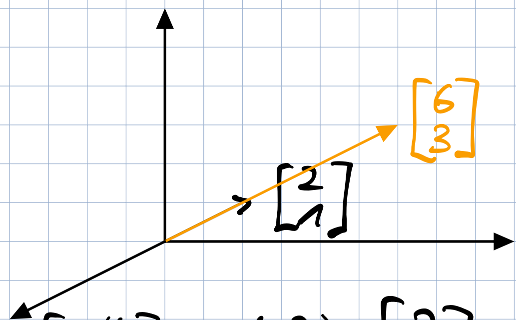
$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}, \; w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$ Der Vektor

$$v + w := \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_m + w_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$ ist die Summe von v, w.

Mehrere Vektoren:

$$u+v+w \;:=\; (u+v)+w \;=\; u+(v+w)$$

Skalarmultiplikation: gehe λ-mal so weit!



$$\underset{\lambda}{\overset{\shortparallel}{3}} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} = (-2) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Definition 1.3: Sei

$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Der Vektor

$\lambda v := \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ ist ein skalares Vielfaches

von v.

Linearkombination: Beides zusammen!

<u>Def. 1.4</u> Seien $v, w \in \mathbb{R}^m$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist $\lambda v + \mu w \in \mathbb{R}^m$ eine Linearkombination von v und w.

Falls $v_1, v_2 \dots v_n \in \mathbb{R}^m$ und $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$, dann ist $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ eine Linearkombination von $v_1, v_2, \dots v_n$.

$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

λ	μ	λv	μw	$\lambda v + \mu w$
-3	2	$\begin{bmatrix} -6 \\ -9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -11 \end{bmatrix}$
1	-1	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Fakt 1.5 Jeder Vektor $u \in \mathbb{R}^2$ ist eine Linearkombination von $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

<u>Beweis</u>: Sei $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Ziel: finde λ, μ, so dass $\lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$.

Zwei Gleichungen in zwei Variablen:

$$2\lambda + 3\mu = u_1$$
$$3\lambda - 1\mu = u_2$$

Addiere $3 \cdot$ (Gleichung 2) zu Gleichung 1:

$$\begin{array}{rcl} 2\lambda + 3\mu &=& u_1 \\ 9\lambda - 3\mu &=& 3u_2 \\ \hline 11\lambda &=& u_1 + 3u_2 \end{array}$$

Löse nach λ auf: $\lambda = \frac{u_1 + 3u_2}{11}$.

Löse nach μ auf (Gleichung 1):

$$3\mu = u_1 - 2\lambda = u_1 - \frac{2u_1 + 6u_2}{11}$$

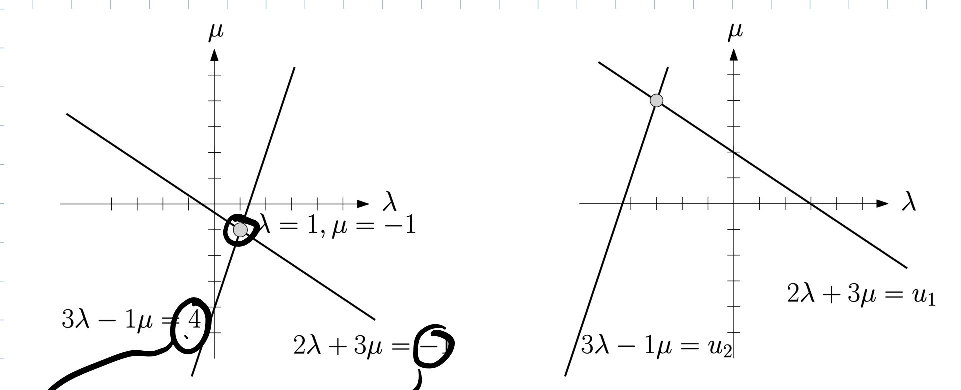
$$= \frac{11u_1 - (2u_1 + 6u_2)}{11}$$

$$= \frac{9u_1 - 6u_2}{11}$$

Teile durch 3:

$$\mu = \frac{3u_1 - 2u_2}{11}.$$

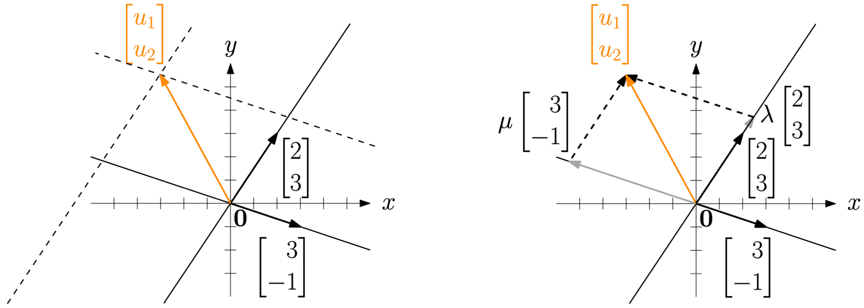
Zeilenbild (Abb. 1.8)



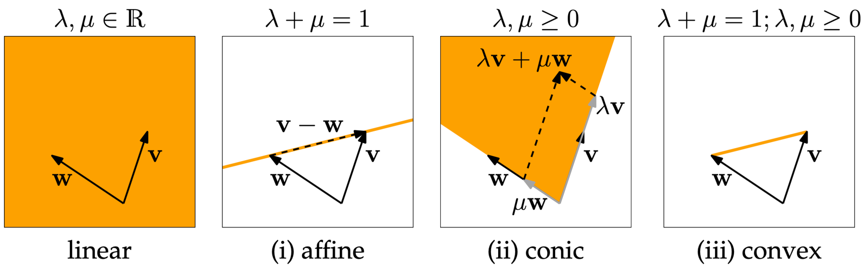
$u = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ allgemeines u

Spaltenbild (Abb. 1.9)

Konstruiere das Parallelogramm!



Spezielle Linearkombinationen (Def. 1.7)



$$\begin{aligned} & \lambda v + \mu w \\ = \ & \lambda v + (1-\lambda) w \\ = \ & w + \lambda (v - w) \end{aligned}$$